



امید ریاضی مفهوم اساسی در مطالعه‌ی توابع احتمال است. امید ریاضی متغیر تصادفی X را با $E(X)$ نشان داده و به این صورت تعریف می‌کنیم:

(۱) اگر X یک متغیر تصادفی گسسته با تابع احتمال $f(x)$ باشد، آنگاه:

$$E(X) = \sum x \cdot f(x)$$

اگر این مجموع به طور مطلق همگرا باشد، $E(X)$ وجود دارد. در غیر این صورت می‌گوییم مقدار میانگین X متناهی نیست.

(۲) اگر X یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی احتمال $\varphi(x)$ باشد، آنگاه:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \varphi(x) dx$$

اگر این انتگرال به طور مطلق همگرا باشد، $E(X)$ وجود دارد. در این صورت می‌گوییم مقدار میانگین X متناهی نیست.

توضیح اصطلاح امید ریاضی: در یک بازی به یک بازیکن اجازه می‌دهند که تاس سالمی را بریزد و به تعداد نقاط روی تاس، پول به تومان دریافت کند. بازیکن مجبور است برای هر دفعه بازی کردن c تومان بپردازد. بدون در نظر گرفتن این مبلغ، درآمد بازیکن در هر دفعه بازی متغیری تصادفی است؛ توزیع احتمالی که در جدول زیر داده شده است.

درآمد x	۱	۲	۳	۴	۵	۶
احتمال $f(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

بنابراین

$$E(X) = \sum x \cdot f(x) = (1 \times \frac{1}{6}) + \dots + (6 \times \frac{1}{6}) = 3,5$$

بازی را «عادlane» گویند اگر c برابر با $3,5$ تومان باشد، زیرا در این صورت متوسط برد در صورت تکرار بازی به دفعات زیاد، برابر با صفر است. اگر بازیکن برای شرکت در هر بازی مبلغ 4 تومان بپردازد، امید ریاضی مقدار باخت خالص بازیکن $0,5$ تومان در هر بازی است. در این مثال نمی‌توان گفت که درآمد بازیکن در هر بازی $3,5$ تومان است، زیرا $E(X)$ لزوماً مقداری نیست که در یک بازی می‌بریم؛ اینکه می‌گوییم $E(X)$ برابر $3,5$ تومان است، بدین معنی است که اگر شرکت در این بازی به دفعات زیاد تکرار بشود، نسبت کل درآمد به تعداد بازی‌های انجام شده تقریباً $3,5$ خواهد بود.

مثال ۲۲ سکه‌ای سالم را دوبار می‌اندازیم. فرض کنید X تعداد شیرهای حاصل باشد. میانگین X چه قدر است؟
 حل. مقادیر ممکن X عبارت‌اند از ۰، ۱، ۲ و تابع احتمال X عبارت است از

x	۰	۱	۲
$f(x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

پس:

$$E(X) = \sum x \cdot f(x) = (0 \times \frac{1}{4}) + (1 \times \frac{1}{2}) + (2 \times \frac{1}{4}) = 1$$

به‌طور متوسط انتظار داریم در هر دو پرتاب یک شیر به‌دست آید.

مثال ۲۳ یک کارواش در روزهای بارانی ۳۰۰۰۰۰۰ ریال خسارت می‌بیند و در روزهای غیربارانی ۹۰۰۰۰۰۰ ریال منفعت می‌برد. اگر احتمال بارندگی ۰٫۱۵ باشد، امید ریاضی منفعت چقدر است؟
 حل.

x	-۳۰۰۰۰۰۰	۹۰۰۰۰۰۰
$f(x)$	۰٫۱۵	۰٫۸۵

$$E(X) = \sum x \cdot f(x) = (-3000000 \times 0.15) + (9000000 \times 0.85) = 7200000$$

مثال ۲۴ تابع چگالی احتمال به‌صورت $\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & 1 < x < 3 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$ مفروض است. امید ریاضی را پیدا کنید.

حل.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \varphi(x) dx = \int_1^3 \frac{1}{2} x dx = \frac{1}{2} x^2 \Big|_1^3 = 2$$

برای متغیر تصادفی X ، تابع چگالی زیر مفروض است:

$$\varphi(x) = a + bx^2, \quad 0 < x < 1$$

اگر $E(X) = \frac{1}{4}$ ، مقادیر a و b را بیابید.
حل.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = 1; \int_0^1 (a + bx^2) dx = \left(ax + \frac{b}{3} x^3 \right) \Big|_0^1 = a + \frac{b}{3} = 1$$

$$E(X) = \frac{1}{4}; \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \varphi(x) dx = \frac{1}{4}; \int_0^1 (ax + bx^3) dx = \frac{1}{4};$$

$$\left(\frac{a}{2} x^2 + \frac{b}{4} x^4 \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{4}; \frac{a}{2} + \frac{b}{4} = \frac{1}{4}; 2a + b = 1$$

بنابراین:

$$\begin{cases} a + \frac{b}{3} = 1 \\ 2a + b = 1 \end{cases}; \begin{cases} -2a - \frac{2}{3}b = -2 \\ 2a + b = 1 \end{cases}; a = 2, b = -3$$

وزن مورد اشاره در اینجا، تابع احتمال و یا تابع چگالی به کار رفته در محاسبه امید ریاضی است.

نکته ۹ امید ریاضی متغیر تصادفی با توزیع احتمال معین، یک نوع میانگین وزنی است. از اینرو آن را میانگین X نیز نامیده و با μ نمایش می‌دهیم، یعنی $\mu = E(X)$.

نکته ۱۰ اگر X یک متغیر تصادفی ثابت باشد، یعنی اگر $P(X = c) = 1$ که در آن c مقداری ثابت است، آنگاه $E(X) = c$. چون تنها مقدار ممکن برای X ، c است، پس

$$E(X) = c \cdot P(x = c) = c \times 1 = c$$

نکته ۱۱ امید ریاضی هر تابعی از متغیر تصادفی X ، مانند $g(x)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنند:

(۱) اگر X یک متغیر تصادفی گسسته با تابع احتمال $f(x)$ باشد، آنگاه:

$$E(g(x)) = \sum g(x) \cdot f(x)$$

۲) اگر X یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی احتمال $\varphi(x)$ باشد، آنگاه:

$$E(g(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot \varphi(x) dx$$

مثال ۲۶ فرض کنید که X یک متغیر تصادفی با تابع احتمال زیر باشد:

x	۰	۱	۲	۳
$f(x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	۰	$\frac{1}{6}$

حاصل $E[\{X - E(X)\}^2]$ را بیابید.

حل. ابتدا باید $E(X)$ را محاسبه کنیم:

$$E(X) = \sum x \cdot f(x) = (0 \times \frac{1}{3}) + (1 \times \frac{1}{2}) + (2 \times 0) + (3 \times \frac{1}{6}) = 1$$

اکنون داریم $E[(X - 1)^2]$ ، پس:

$$\begin{aligned} E[(X - 1)^2] &= \sum (x - 1)^2 \cdot f(x) = (-1)^2 f(0) + (0)^2 f(1) + (1)^2 f(2) + (2)^2 f(3) \\ &= (1 \times \frac{1}{3}) + (0 \times \frac{1}{2}) + (1 \times 0) + (4 \times \frac{1}{6}) = 1 \end{aligned}$$

مثال ۲۷ متغیر تصادفی پیوسته X ، دارای تابع چگالی زیر است:

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

امید ریاضی تابع با ضابطه $g(x) = e^{-2x-2}$ را بیابید.
حل.

$$\begin{aligned} E(e^{-2x-2}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{-2x-2})(e^{-x}) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-3x-2} dx \\ &= \left(-\frac{1}{3} e^{-3x-2} \right) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0 - \left(-\frac{1}{3} e^{-2} \right) = \frac{1}{3} e^{-2} \end{aligned}$$

☆ نکته ۱۲ فرض کنیم $X_1, X_2, \dots, X_n$ متغیرهای تصادفی روی فضای نمونه‌ی S باشند، در این صورت:

$$E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n)$$

مثال ۲۸/۳ تاس سالم را باهم پرتاب می‌کنیم، متوسط مجموع اعداد به‌دست آمده چه قدر است؟
حل. اگر X را نتیجه‌ی حاصل از پرتاب تاس تعریف کنیم، آنگاه مقادیری را که X می‌تواند اختیار کند به‌صورت مجموعه‌ی $\{1, 2, 3, \dots, 6\}$ است. احتمال وقوع هر یک از اعداد این مجموعه برابر $\frac{1}{6}$ است. پس:

$$E(X) = \sum x \cdot f(x) = (1 + 2 + 3 + \dots + 6) \left(\frac{1}{6}\right) = \frac{7}{2}$$

اما صورت مسأله امید ریاضی را در پرتاب ۳ تاس مد نظر دارد. بنابراین:

$$E(X_1 + X_2 + X_3) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) = \frac{7}{2} + \frac{7}{2} + \frac{7}{2} = \frac{21}{2}$$

☆ ۳-۴-۱ ویژگی‌های امید ریاضی از طریق تعریف امید ریاضی براحتی می‌توان این ویژگیها را اثبات کرد.

اگر a, b و c مقادیر ثابتی باشند، آنگاه:

$$\begin{array}{ll} ۱) E(b) = b & ۵) E(E(X)) = E(X) \\ ۲) E(aX) = aE(X) & ۶) X \geq 0 \implies E(X) \geq 0 \\ ۳) E(aX + b) = aE(X) + b & ۷) E\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i E(X_i) \\ ۴) E(aX^2 + bX + c) = aE(X^2) + bE(X) + c & \end{array}$$

البته X ها باید متغیرهای تصادفی یک فضای نمونه‌ای باشند.

مثال ۲۹ تابع احتمال زیر مفروض است، مقدار $E(-3X + 7)$ را محاسبه کنید.

x	۲	۴	۶	۸	۱۰
$f(x)$	۰٫۱۰	۰٫۲۵	۰٫۳۰	۰٫۲۵	۰٫۱۰

حل.

$$E(X) = \sum x \cdot f(x) = 0.10 + 1 + 1.80 + 2 + 1 = 6$$

$$E(-3X + 7) = -3E(X) + 7 = (-3)(6) + 7 = -11$$

مثال ۳۰ اگر $E(X) = ۱$ ، $E(X^۲) = ۲$ و $Z = (۲X - ۱)^۲$ ، $E(Z)$ را بیابید.

حل.

$$Z = (۲X - ۱)^۲ = ۴X^۲ - ۴X + ۱ ; E(Z) = ۴E(X^۲) - ۴E(X) + ۱ \\ = (۴ \times ۲) - (۴ \times ۱) + ۱ = ۵$$

مثال ۳۱ مستطیلی با ابعاد تصادفی X و $۱ - X$ را در نظر بگیرید. اگر متغیر تصادفی X با چگالی احتمال زیر باشد،

$$\varphi(x) = ۳x^۲ \quad ۰ < x < ۱$$

انتظار می‌رود مساحت مستطیل چه قدر باشد؟

حل.

$$E(S) = E[X(۱ - X)] = E(X - X^۲) = E(X) - E(X^۲)$$

داریم:

$$E(X) = \int_0^1 ۳x^۲ dx = \left. \frac{۳}{۴} x^۴ \right|_0^1 = \frac{۳}{۴}, \quad E(X^۲) = \int_0^1 ۳x^۴ dx = \left. \frac{۳}{۵} x^۵ \right|_0^1 = \frac{۳}{۵}$$

بنابراین:

$$E(S) = \frac{۳}{۴} - \frac{۳}{۵} = \frac{۳}{۲۰}$$

۳-۵ واریانس



چون $\mu = E(X)$ معیاری است برای گرایش به مرکز یک توزیع، طبیعی است که در جستجوی معیاری برای پراکندگی توزیع، انحراف‌های X از μ را مورد بررسی قرار دهیم. یکی از این قبیل معیارها واریانس متغیر تصادفی است. واریانس یک متغیر تصادفی مانند X را با $Var(X)$ یا $\sigma_X^۲$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Var(X) = E[(X - \mu)^۲] = E(X^۲) - [E(X)]^۲ = E(X^۲) - \mu^۲$$

اشکالی که در استفاده از واریانس به عنوان معیار اصلی برای پراکندگی وجود دارد، این است که اگر X برحسب واحدی اندازه گرفته شود (برای مثال تومان)، آنگاه $Var(X)$ برحسب ۲ (تومان) خواهد بود. برای این که معیار پراکندگی با همان واحد X بیان شود باید ریشه‌ی دوم مثبت واریانس را در نظر گرفت. این ریشه‌ی دوم واریانس، انحراف معیار (σ_X) نامیده می‌شود.

همان رابطه $\frac{\sum X^2}{N}$ که در فصل ۱ یاد گرفته ایم.

چون مفهوم امید ریاضی همان مفهوم میانگین است، این بخش از رابطه همان رابطه μ^2 است که در فصل ۱ یاد گرفته ایم.

$$Var(X) = E(X - E(X))^2 = \sum [(X - E(X))^2 \times f(X)] = \\ \sum [(X^2 - 2XE(X) + E^2(X))f(X)] = E(X^2) - E^2(X) = E(X^2) - \mu^2$$

مثال ۳۲ اگر متغیر تصادفی X دارای میانگین صفر و واریانس ۹ باشد، آنگاه میانگین $Y = X(X + ۱)$ را بیابید. حل.

$$E(X) = ۰, Var(X) = ۹; E(Y) = E(X^T + X) = E(X^T) + E(X)$$

می دانیم:

$$Var(X) = E(X^T) - [E(X)]^T; ۹ = E(X^T) - ۰; E(X^T) = ۹$$

پس:

$$E(Y) = ۹ + ۰ = ۹$$

مثال ۳۳ اگر بدانیم برای متغیر تصادفی X روابط $E(X) = ۲$ و $E[X(X - ۴)] = ۵$ برقرار است، واریانس این متغیر تصادفی را بیابید. حل.

$$E[X(X - ۴)] = ۵; E(X^T - ۴X) = ۵; E(X^T) - ۴E(X) = ۵;$$

$$E(X^T) - ۴ \times ۲ = ۵; E(X^T) = ۱۳$$

بنابراین:

$$Var(X) = E(X^T) - (E(X))^T = ۱۳ - ۴ = ۹$$

مثال ۳۴ توزیع احتمال زیر مفروض است، $Var(X)$ را بیابید.

x	۰	۱	۲
$f(x)$	۰٫۲	۰٫۵	۰٫۳

حل.

$$E(X) = \mu = \sum x \cdot f(x) = (۰ \times ۰٫۲) + (۱ \times ۰٫۵) + (۲ \times ۰٫۳) = ۱٫۱$$

$$E(X^T) = \sum x^T \cdot f(x) = (۰ \times ۰٫۲) + (۱ \times ۰٫۵) + (۴ \times ۰٫۳) = ۱٫۷$$

بنابراین:

$$Var(X) = E(X^T) - \mu^T = ۱٫۷ - ۱٫۱^T = ۰٫۴۹$$

مثال ۳۵ تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی X به صورت $\varphi(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{2} & 1 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$ داده شده است.

انحراف معیار X را محاسبه کنید.

حل.

$$\mu = E(X) = \int_1^3 x \cdot \varphi(x) dx = \int_1^3 \frac{x^2 - x}{2} dx = \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} \right) \Big|_1^3 = \frac{7}{3}$$

$$E(X^T) = \int_1^3 x^T \cdot \varphi(x) dx = \int_1^3 \frac{x^3 - x^2}{2} dx = \left(\frac{x^4}{8} - \frac{x^3}{6} \right) \Big|_1^3 = \frac{68}{15}$$

بنابراین:

$$Var(X) = E(X^T) - \mu^T = \frac{68}{15} - \left(\frac{7}{3} \right)^2 = \frac{49}{45}; \sigma_X^2 = \frac{49}{45}; \sigma_X = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{45}}$$

مثال ۳۶ تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی X با محدودیت $0 \leq x \leq c$ ، به صورت $\varphi(x) = \frac{2x}{c^2}$ است. c چه مقدار باشد تا $\sigma_X^2 = 2$ ؟
حل.

$$E(X) = \int_0^c \frac{2x^2}{c^2} dx = \left. \frac{2x^3}{3c^2} \right|_0^c = \frac{2}{3}c ; E(X^2) = \int_0^c \frac{2x^3}{c^2} dx = \left. \frac{x^4}{c^2} \right|_0^c = \frac{1}{2}c^2$$

بنابراین:

$$\sigma_X^2 = E(X^2) - (E(X))^2 = 2 ; \frac{1}{2}c^2 - \frac{4}{9}c^2 = 2 ; c^2 = 36 ; c = 6$$

☆ ۳-۵-۱ ویژگی‌های واریانس
آیا این فرمولها همان فرمولهایی نیست که در فصل ۱ درباره واریانس به دست آوردیم.
با استفاده از مفهوم امید ریاضی هم می‌توان آنها را براحتی اثبات کرد.
اگر a و b مقادیر ثابتی باشند، آنگاه:

$$\begin{array}{ll} ۱) Var(b) = 0 & ۳) Var(aX + b) = a^2 Var(X) \\ ۲) Var(aX) = a^2 Var(X) & ۴) P(X = c) = 1 \iff Var(X) = 0, c = \mu_X \end{array}$$

ویژگی شماره ۴ می‌گوید که اگر متغیر تصادفی X دارای واریانس صفر باشد، $Var(X) = 0$ ، آنگاه X با احتمال یک برابر میانگین می‌شود.

مثال ۳۷ اگر $E(X) = 1/5$ و $E(X^2) = 6$ ، $Var(-2X + 5)$ را محاسبه کنید.
حل.

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 6 - (1/5)^2 = 3,75$$

$$Var(-2X + 5) = (-2)^2 \cdot Var(X) = 4 \times 3,75 = 15$$

مثال ۳۸ اگر $E(X) = 1$ و $Var(X) = 5$ ، مقدار $E[(X + 2)^2]$ را بیابید.
حل.

$$Var(X) = E(X^2) - \mu^2 ; 5 = E(X^2) - 1 ; E(X^2) = 6$$

$$E[(X + 2)^2] = E(4 + 4X + X^2) = 4 + 4E(X) + E(X^2) = 4 + 4 + 6 = 14$$